Diffeomorfismi

Omeomorfismi

Definizione 1. *Siano U e V due insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che la funzione*

$$\Phi : U \to V$$

è un **omeomorfismo** *tra U e V, se:*

- *Φ è continua;*
- *$\Phi : U \to V$ è bigettiva;*
- *la sua inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ è continua.*

Osservazione 2. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti e $\Phi : U \to V$ un omeomorfismo. Allora, anche $\Phi^{-1} : V \to U$ è un omeomorfismo.*

Proposizione 3. *Siano U e V due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\Phi : U \to V$ un omeomorfismo. Allora:*

(i) *per ogni aperto $A \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(A)$ è aperto.*

(ii) *per ogni aperto $A \subset U$, l'insieme $\Phi(A)$ è aperto.*

(iii) *per ogni compatto $K \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(K)$ è compatto.*

(iv) *per ogni compatto $K \subset U$, l'insieme $\Phi(K)$ è compatto.*

(v) *per ogni chiuso $C \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(C)$ è chiuso.*

(vi) *per ogni chiuso $C \subset U$, l'insieme $\Phi(C)$ è chiuso.*

(vii) *per ogni insieme Ω tale che $\overline{\Omega} \subset U$ abbiamo che $\Phi(\partial\Omega) = \partial(\Phi(\Omega))$.*

(viii) *per ogni insieme connesso per archi $\Omega \subset U$, l'insieme $\Phi(U)$ è connesso per archi.*

(ix) *per ogni insieme connesso per archi $\Omega \subset V$, l'insieme $\Phi^{-1}(V)$ è connesso per archi.*

Osserviamo che i punti (i), (ii), (iii), (iv), (v) e (vi) seguono dal lemma seguente.

Lemma 4. *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Allora, per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^m$, anche*

$$\Phi^{-1}(A) = \Big\{X \in \Omega \ : \ \Phi(X) \in A\Big\} \subset \mathbb{R}^n$$

è aperto.

Corollario 5 (Composizione di omeomorfismi)**.** *Siano U, V, A e B inisemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e siano*

$$\Phi : U \to V \qquad e \qquad \Psi : A \to B$$

due omeomorfismi. Allora, anche la composizione

$$\Psi \circ \Phi : \Phi^{-1}(V \cup A) \to \Psi(V \cup A)$$

è un omeomorfismo.

Corollario 6. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti e $\Phi : U \to V$ un omeomorfismo. Allora, per ogni aperto $A \subset U$,*

$$\Phi : A \to \Phi(A),$$

è un omeomorfismo.

Diffeomorfismi

Definizione 7. *Siano U e V due insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che la funzione*

$$\Phi : U \to V$$

è un **diffeomorfismo** *di classe C^1 tra U e V, se:*

- *Φ è di classe C^1 su U (ovvero Φ è continua e differenziabile in ogni punto di U e le derivate parziali delle sue componenti sono funzioni continue);*
- *$\Phi : U \to V$ è bigettiva ;*
- *la sua inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ è di classe C^1 su V.*

Osservazione 8. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti e $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora, anche $\Phi^{-1} : V \to U$ è un diffeomorfismo.*

Osservazione 9. *Siano U, V, A e B inisemi aperti di $\mathbb{R}^n$ e siano*

$$\Phi : U \to V \qquad e \qquad \Psi : A \to B$$

due diffeomorfismi. Allora, anche la composizione

$$\Psi \circ \Phi : \Phi^{-1}(V \cup A) \to \Psi(V \cup A)$$

è un diffeomorfismo.

Osservazione 10. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^n$ due aperti e $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora, per ogni aperto $A \subset U$,*

$$\Phi : A \to \Phi(A),$$

è un diffeomorfismo.

Proposizione 11. *Siano U e V due aperti connessi di $\mathbb{R}^n$. Sia $\Phi : U \to V$ un diffeomorfismo. Allora,*

$$\det J\Phi(x) \neq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad x \in U.$$

Inolte, la funzione

$$\det J\Phi \ : U \to \mathbb{R}$$

ha segno costante su U.

Dimostrazione. Sia $\Psi : V \to U$ l'inversa di Φ. Siano

$$X_0 \in U \quad \text{e} \quad Y_0 = \Phi(X_0) \in V.$$

Allora, abbiamo che

$$J\Psi(Y_0)\, J\Phi(X_0) = Id.$$

Di conseguenza,
$$\det\big(J\Psi(Y_0)\big)\ \det\big(J\Phi(X_0)\big) = \det(Id) = 1,$$
il che dimostra che $\det J\Phi(X_0) \neq 0$ e siccome X_0 è un punto arbitrario,
$$\det J\Phi \neq 0 \quad \text{su} \quad U.$$
Osserviamo che la funzione
$$\det J\Phi : U \to \mathbb{R}$$
è ottenuta come somma e prodotto delle derivate parziali di Φ. Di conseguenza, essa è continua su U. Infine, siccome l'insieme U è connesso, abbiamo che $\det J\Phi$ non cambia segno in U. $\square$

Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo usato il seguente ben noto risultato. Per completezza, riportiamo la dimostrazione in dimensione due.

Lemma 12. *Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora*
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dimostrazione in dimensione due. Osserviamo che
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix}.$$
Si ha quindi
$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} aA + bB & aC + bD \\ cA + dB & cC + dD \end{pmatrix} &= (aA + bB)(cC + dD) - (cA + dB)(aC + bD) \\ &= aAdD + bBcC - \big(cAbD + dBaC\big) \\ &= (ad - bc)(AD - BC) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
$\square$